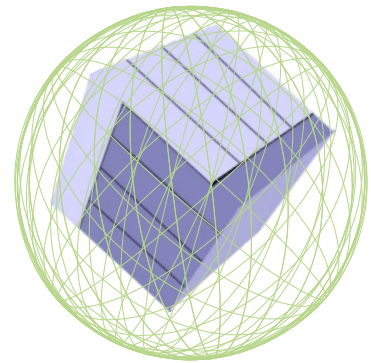


CalcMe

Ligninger





Hej, vi er glade for at se dig!

Du har fået dette hæfte, fordi du skal lære at bruge cas-programmet CalcMe sammen med ligninger

CAS er en forkortelse for **C**omputer-**A**lgebra-**S**ystem.

Et cas-program er et skriveprogram specielt til matematik, lige som Word eller Google Doc som du bruger til dansk.

Før du går i gang med hæftet, vil vi lige minde dig om, at du skal arbejde i dit eget tempo, og huske at læse hvad der står på siden. Det er for at sikre, at du får mest muligt ud af dit selvstudie.

Det er ikke fordi det er svært, at bruge CalcMe, men som alt andet kræver programmet øvelse. Også her gælder; øvelse gør mester.

Tilbage er der bare at ønske god fornøjelse.

CalcMe =

- Symboler
- Aritmetik
- Polynomier
- Statistik
- Funktioner
- Infinitesimalregning
- Lineær algebra
- Kombinatorik
- Logik og mængde
- Løs
- Græsk
- Måleenheder
- Grafik
- Programmering
- Format

CalcMe menu

CalcMe værktøjslinje

CalcMe Skrivebord

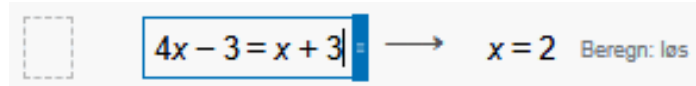
Du åbner **CalcMe** ved at åbne en browser, fx Google Chrome eller Microsoft Edge, og i adressefeltet skrive; *calcme.com*

Ligninger

Det er meget nemt at løse ligninger i CalcMe. Alt, hvad du skal gøre er, at skrive ligningen og afslutte med **Enter**.

Eksempel:

Løs ligningen; $4x - 3 = 3 + x$



... og det var så det, tænker du. Men der er mere, og det er det dette hæfte handler om.

Lidt om genveje

Jo mere du arbejder med CalcMe, jo bedre bliver du til at anvende tastaturgenveje. De er smarte fordi, de sparer dig tid. Men man skal kende dem og øve dem, så slipper du for at bruge musen så meget og finde de rigtige 'klik'.

Du kender sikkert allerede nogle af tastaturgenveje, fx **Ctrl + b** = **fed skrift**, **Ctrl + i** = *kursiv skrift* og **Ctrl + u** = understreget tekst.

Sidder du med en Mac, skal du bruge **cmd**-tasten i stedet for **Ctrl**.

Inden vi går igang, så lad os øve os ved hurtigt i en browser at skrive:

calcme.com

og i CAS-programmet løse følgende ligninger (se først om du kan løse ligningerne i hovedet. Prøv derefter efter i CalcMe om du har regnet rigtig!).

Løs ligningerne:

1. $X + 2 = 0$
2. $4X + 3 = 19$
3. $2X + 5 = 11$
4. $40 + 3x = 34$



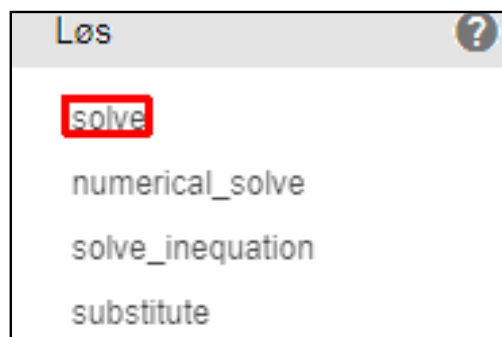
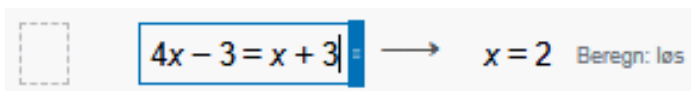
Ligninger

I CalcMe er der mere end en måde at løse en ligning på. Der er den første metode, som du allerede har set.

Klik på CalcMe's skrivebord, en blå boks kommer frem. Skriv ligningen i boksen og afslut med **Enter**

Eksempel 1:

Løs ligningen $4x - 3 = x + 3$

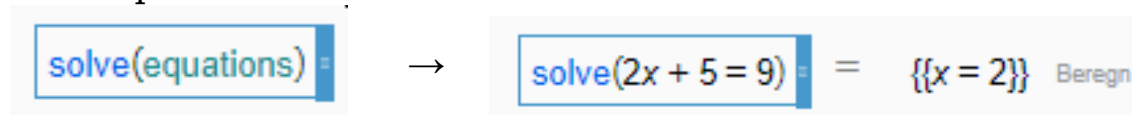


Metode 2

I menuen, klik på **Løs**. Du har nu fire muligheder.
← Klik på **solve**.

En blå boks kommer frem på CalcMe's skrivebord. Skriv den ligning du vil have løst i den blå boks, og afslut med **Enter**.

Eksempel:



Hvilken metode du bruger, er helt op til dig selv. Brug den metode du mener at kunne huske bedst.

Løs ligningerne ved at bruge **solve**:

1. $X + 2 = -4$
2. $4X - 5 = 19$
3. $2X + 5 = 3$
4. $40 + 3x = -10$




Ligning, hvor resultatet ikke giver mening

Det er **ikke altid** at ligningen viser et aflæsbart resultat. Nogle gange er løsningen en brøk eller en kvadratrod, hvor du skulle have brugt et decimaltal.


Sådan fremtvinges løsningen som et decimaltal

I CalcMe er der tre muligheder for at fremtvinge resultatet som et decimaltal.

Mulighed 1:


Efter at du har løst ligningen, og fået et resultat der ikke er det decimaltal du skal bruge, slutter du af med at klikke på **Approks**  i værktøjslinjen.

Eksempel:

$$3x + 5 = 7x + 4 \rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ Beregn: løs} + \text{  }$$

$$3x + 5 = 7x + 4 \rightarrow x = 0.25 \text{ Approks: løs}$$

Mulighed 2:

I stedet for at anvende **Approks**  i værktøjslinjen, kan du også anvende genvejsknapperne: **Ctrl + Shift + A** (**cmd + Shift + A** på Mac)

Eksempel:

$$7x + 3 = 2x - 8 \rightarrow x = -\frac{11}{5} \text{ Beregn: løs} \quad \text{Ctrl + Shift + A}$$

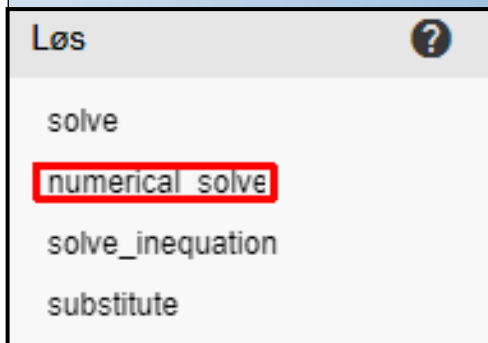
$$7x + 3 = 2x - 8 \rightarrow x = -2.2 \text{ Approks: løs}$$

Løs ligningerne. Prøv skiftevis at bruge den ene eller anden metode - hvilken foretrækker **du**?

1. $5X + 1 = -2x - 18$
2. $4X - 7 = 8$
3. $9x - 10 = 58$
4. $3x - 3 = 4x - 4$



Ligning, hvor resultatet ikke giver mening

Metode 3:

← Ved at klikke på **Løs** i menuen, får du fire muligheder. Du skal bruge **numerical_solve**

Klik på **numerical_solve** og skriv ligningen du vil have løst i den blå kasse. Afslut med **Enter**

Eksempel

`numerical_solve(equations)` → `numerical_solve(5x + 1 = 3x - 8)` = {x = -4.5} Beregn

Du kender nu tre måder at tvinge CalcMe til at skrive resultatet som et decimaltal på.

1. Ved brug af **Approks**
2. Ved brug af tastaturgenvejen **Ctrl + Shift + A**
3. Ved at bruge menuens **numerical_solve**

Alle tre metoder giver samme resultat. Hvilken metode du foretrækker, bestemmer du selv - personligt foretrækker jeg **Ctrl + Shift + A**, fordi jeg ikke vil spilde tiden med at finde **Approks** eller **numerical_solve** i **menuen**.



Løs ligningerne igen, men denne gang ved at bruge **numerical_solve** ved at klikke på **Løs** i menuen - hvilken foretrækker **du** nu?

1. $5X + 1 = -2x - 18$
2. $4X - 7 = 8$
3. $9x - 10 = 58$
4. $3x - 3 = 4x - 4$

Ligninger med to ubekendte

CalcMe kan med lethed løse ligninger med **to ubekendte**.

Det er ikke altid der kun er en men hele to ubekendte. Hvis man kun har én ligning, kan man få én løsning. Har man har to ligninger, kan man nå frem til to løsninger.

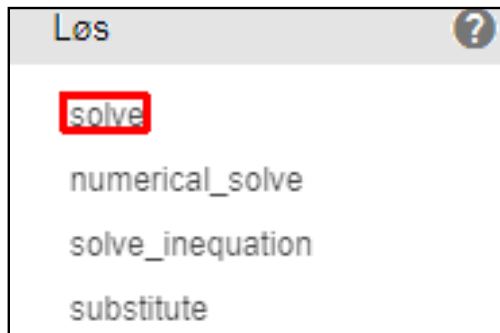
Lad os se på et eksempel. Vores to ligninger er;

$$-x + 2y = 1$$

$$2x - 3y = -1$$

Løsningen er et **talpar**, der sikrer, at der står det samme på begge sider af lighedstegnet i hver af de to ligninger. Der skal gælde at

$$-x + 2y = 1 \text{ og } 2x - 3y = -1, \text{ skal gælde samtidigt.}$$



Lad os løse ligningerne med to ubekendte i **Calcme**.

Klik et sted på CalcMe's skrivebord, klik bagefter på **Løs** i menuen og vælg **Solve**.

`solve(equations)`

Klik inde i **equations** og skriv de ligninger, adskilt af et komma, og afslut med **Enter**.

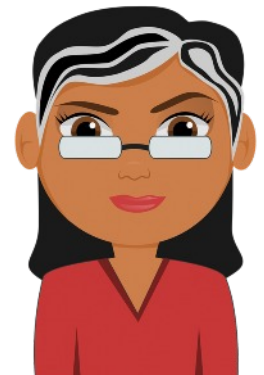
$$\text{solve}(-x + 2y = 1, 2x - 3y = -1) = \{x = 1, y = 1\} \text{ Beregn}$$

Så let var det! Nu er **det din** tur - kan du løse følgende ligninger med to ubekendte i **CalcMe**?

1. $4x - 6y = 4$ og $6x - 9y = 6$

2. $2y = 3x - 135$ og $3x + 1500 = 6y$

3. $Y - x = 1$ og $x - y = 8$



Nu ved du allerede meget om at løse ligninger i **CalcMe**. Nu skal du videre til næste kapitel: hvordan løses ligninger grafisk?

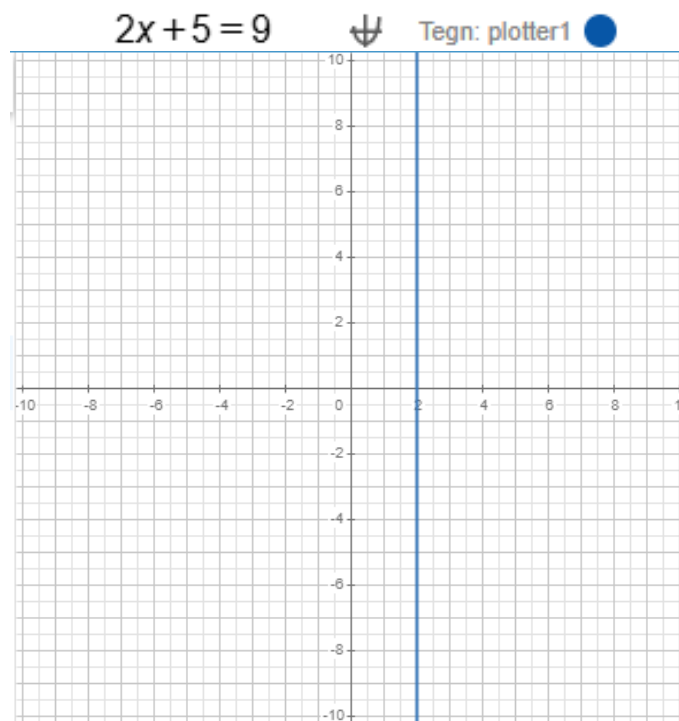
Grafisk løsning af ligninger

Af og til, bliver du bedt om at vise den **grafiske løsning** af en ligning. Det er **meget nemt i CalcMe!**

Lad os for nemheds skyld, tage en af de ligninger vi allerede har løst og kender resultatet til.

$$2x + 5 = 9 \Rightarrow x = 2$$

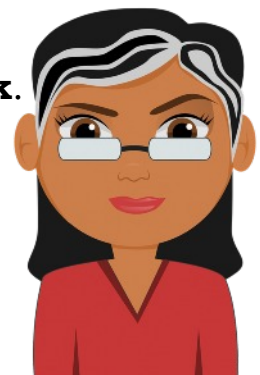
Løs den i **CalcMe**, ved at klikke et sted på CalcMe's skrivebord, og skriv ligningen. Afslut med at klikke på **tegn**  i værktøjslinjen.



Resultatet bliver en **lodret streg** der skærer **x-aksen** i **$x = 2$** . Du har nu løst ligningen grafisk, og ganske rigtigt fundet ud af at ligningens løsning er $x = 2$, der hvor den lodrette linje skærer x-aksen.

Prøv på samme måde at løse følgende ligninger **grafisk**.

1. $-3x + 4 = 7$
2. $22x - 40 = 26$
3. $11x = 2x - 36$




Grafisk løsning af ligninger


Hvis du bliver bedt om at vise den **grafiske løsning** af to ligninger med to ubekendte, er det også **meget nemt** i **CalcMe**!

Lad os for nemheds skyld, tage en af de ligninger vi allerede har løst og kender resultatet af.

$$-x + 2y = 1$$

$$2x - 3y = -1$$

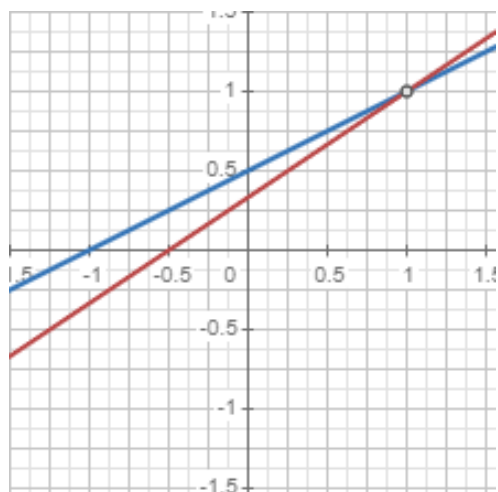
Løs den i **CalcMe**, ved at klikke et sted på CalcMe's skrivebord, og skriv først den ene ligningen. Afslut med at klikke  på **tegn** i værktøjslinjen.

Gør det samme med den anden ligning, klik et sted på CalcMe's skrivebord, og skriv først den anden ligningen. Afslut  med at klikke på **tegn** i værktøjslinjen.

$$-x + 2y = 1 \quad \downarrow \quad \text{Tegn: plotter1} \quad \bullet$$

$$2x - 3y = -1 \quad \downarrow \quad \text{Tegn: plotter1} \quad \bullet$$

Først tegner **CalcMe** den blå linje, derefter en blå linje. Der hvor de to linjer krydser hinanden, $(x,y) = (1,1)$, finder du ligningens løsning.



← På tegningen ses, at de to linjer krydser hinanden i punktet $(x,y) = (1,1)$, derfor er ligningernes løsning:

$$x = 1$$

$$y = 1$$

Fordi:

$$-1 + 2 \cdot 1 = 1 \quad \text{og} \quad 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1$$

Kan du finde den grafiske løsning til følgende to ligninger med to ubekendte?

$$x + 2y = 1 \quad \text{og} \quad 2x + y = -1$$



Den lille test



Det var flot, du nåede til vejs ende! Der er lidt mere, om det at løse ligninger som programmør, men ellers slutter hæftet her med en lille test. Se om du kan løse ligningerne i **CalcMe** på din computer.

Løs ligningerne:

1. $40 + 2x = x + 43$
2. $4x + 16 = x + 1$
3. $2x + 16 = x + 14$
4. $8x - 2 = 3x - 22$
5. $4x - 3 = 2x - 2$

Løs ligningerne grafisk:

1. $40 + 2x = x + 43$
2. $4x + 16 = x + 1$
3. $2x + 16 = x + 14$
4. $8x - 2 = 3x - 22$
5. $4x - 3 = 2x - 2$

Fik du samme
Resultat?

Løs ligningerne med to ubekendte:

1. $y = 2x + 8$ og $y = 3x - 4$
2. $y = 7x - 11$ og $y = -2x + 6$
3. $4x + 2y = 15$ og $3x - 6y + 4 = 0$
4. $6x - 5y = 31$ og $7x + 4y = 21$

Fik du samme
Resultat?

Find den grafiske løsning til
ligningerne med to ubekendte

1. $y = 2x + 8$ og $y = 3x - 4$
2. $y = 7x - 11$ og $y = -2x + 6$
3. $4x + 2y = 15$ og $3x - 6y + 4 = 0$
4. $6x - 5y = 31$ og $7x + 4y = 21$

Programmer en løsning frem

Når du løser en ligning i CalcMe, fortæller CalcMe dig ikke, hvordan programmet løser ligningen - det sker ligesom af sig selv uden at du behøver at tænke mere over det.

Dermed **har du ikke lært, hvordan man løser ligning**, du har kun lært, hvordan man løser en ligning i et CAS-program!

En af måderne du kan bruge til at lære dig selv at løse en ligning, er ved at skrive et program i CalcMe der løser en hvilken som helst ligning.

For at det kan lade sig gøre, skal du kende lidt til nogle af de kommandoer i CalcMe du kan anvende.

repeat: gentag

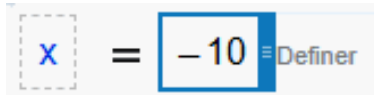
until: indtil det er sandt at ...

tildeling af en variabel

Lad os lave et program der kan løse ligningen $2x + 5 = 9$ (du gennemskuer hurtigt at $x = 2$)

Programmet:

Først skal du **definere** variabelen x , det betyder at give x en startværdi; $x = -10$.



Lige nu har x værdien -10 . Ved at **lægge én til tallet** x får du $x = -9$, ved at lægge én til den nye x -værdi får du -8 osv.

Det udnytter vi i vores program, ved at fortælle CalcMe, at programmet skal gentage (**repeat**) med lægge én til x -værdien indtil (**until**) at ligningen går op.

$x = -10$ Definer

repeat

$x = x + 1$

until $2 \cdot x + 5 = 9$ = 2 Beregn

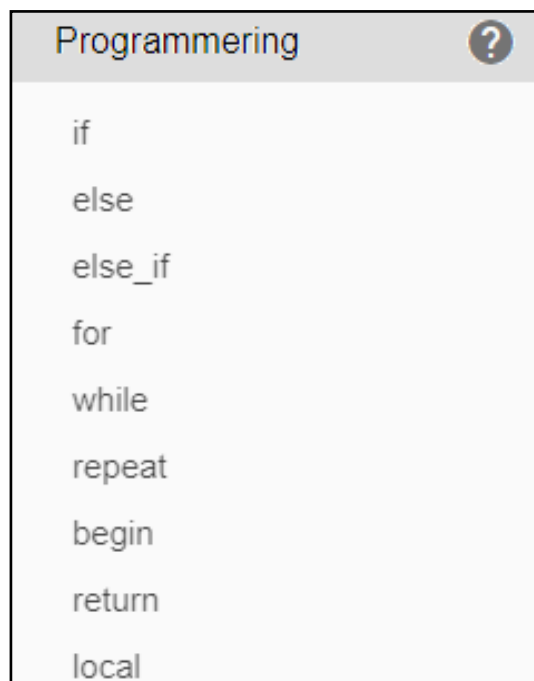
Programmet prøver at finde en løsning på $2x + 5 = 9$, ved at sætte forskellige tal ind på x 's plads, indtil ligningen går op (der står den samme værdi på begge sider af lighedstegnet).

Hvis $x = -10$ går ligningen ikke op, fordi $2 \cdot -10 + 5 = -15$ og ikke 9

Hvis $x = -9$ går ligningen ikke op, fordi $2 \cdot -9 + 5 = -13$ osv

Hvis $x = 2$ går ligningen op, fordi $2 \cdot 2 + 5 = 9$

Sådan skriver du programmet.



Klik på Programmering i menuen. Du har nu 9 forskellige kommandoer, du kan anvende. Der er flere, men dette er de mest almindelige.

Klik på **CalcMe's** skrivebord og skriv i venstre yderste kasse x og i den næste kasse -10

$x = -10$

Nu har vi givet x en start-værdi.

Klik dernæst på kommandoen repeat (gentag)

repeat
until condition

CalcMe tilføjer selv den anden kommando until (indtil) condition (noget er sandt) Skriv i den blå kasse, hvad det er du vil have programmet til at gentage ($x = x + 1$)

repeat
 $x = x + 1$
until condition

Skriv i stedet for condition, hvor længe den skal gentage med, at lægge en til x - værdien (i det her tilfælde indtil at $2 \cdot x + 5 = 9$). Afslut med **Enter**

repeat
 $x = x + 1$
until $2x + 5 = 9$ = 2 Beregn

Tillykke, du har skrevet dit første program i **CalcMe**.

Programmeringsopgave

Prøv nu at anvende programmet til, at løse følgende ligninger, ved at skifte ligningen $2x + 5 = 9$ ud med:

$$7 \cdot x + 8 = 15$$

$$2 \cdot x - 4 = -2 \cdot x + 4$$

$$3 \cdot (2 \cdot x - 1) = 2 \cdot x - 3$$

$$4 \cdot x + 16 = x + 1$$

$$3 \cdot (x + 1) = 12$$

Kan du lave et program, der løser en andengradsligning?

Scimath Consulting

Vestervangen 45
4300 Holbæk
Dk

(+45) 4048 33 66
scimath.consulting@outlook.com
www.scimath.dk

